Рассмотрим произвольную систему заряженных неподвижных проводников, пространство между которыми заполнено неподвижным диэлектриком – однородным или неоднородным. В этих условиях потенциалы проводников являются линейными однородными функциями их зарядов.

где – потенциальные коэффициенты. Разрешив эти уравнения, можем написать

где – емкостные коэффициенты.

Эти коэффициенты обладают следующими свойствами:

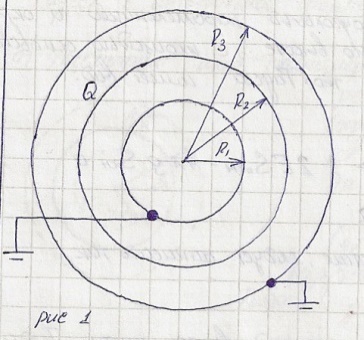
1. Симметрия

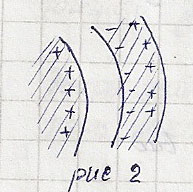
2. Все потенциальные коэффициенты положительны

3. Емкостные коэффициенты с одинаковыми индексами положительны, а с разными индексами отрицательны.

4.

**\*\*Задача**. Из трех концентрических бесконечно тонких металлических сфер с радиусами крайние заземлены, а средней сфере сообщен электрический заряд . Найти напряженность поля во всех точках пространства. Сферы находятся в вакууме.

**Решение**. Заземленность крайних сфер означает, что их потенциал равен потенциалу земли. Потенциал земли принимается равным нулю. Известно, что в случае заряженной сферы

Поскольку сфера заряжена, под ее воздействием на сферах и индуцируется заряд. Если бы крайние сферы не были бы заземлены, то заряд индуцировался бы в пристеночных слоях (рис). Причем так, что суммарный заряд был бы равен нулю по закону сохранения заряда. В случае же, когда сфера заземлена, она может добрать или отдать необходимый заряд у земли.

Потенциал ищется алгебраической суммой, поэтому на поверхностях крайних сфер

Из этих двух уравнений находим

Проверим результат. По закону сохранения заряда . Действительно

Теперь несложно найти напряженность полей.

При результат не нуждается в пояснениях

При

При

При

**\*\*Задача**. Доказать формулу Грина:

Это равенство имеет место в том случае, если при потенциалах - проводников их заряды равны , а при потенциалах их заряды .

**Решение**. Заряды и потенциалы проводников не могут быть заданы одновременно произвольным образом. Между ними существует связь

Итак, если при потенциалах - проводников их заряды равны то верно написанное равенство. Если при потенциалах их заряды , то

Теперь можем написать, учитывая симметрию коэффициентов

что и требовалось доказать.

**\*\*Задача**. Выразить взаимную ёмкость системы , состоящую из двух проводников с зарядами через емкостные коэффициенты.

**Решение**. Взаимная емкость, или просто емкость, противоположно заряженных проводников (конденсатора) определяется соотношением:

Заряды проводников выражаются через емкостные коэффициенты так

Из системы находим

С учетом симметрии коэффициентов, получим

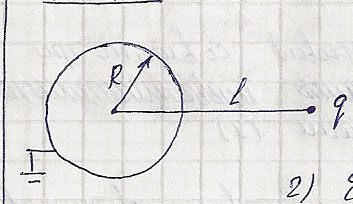
**\*\*Задача**. Точечный заряд размещен в точке вблизи системы заземленных проводников и индуцирует на них заряды . Если бы заряд отсутствовал, а один из проводников (- ый) имел потенциал (остальные по-прежнему заземлены), то потенциал поля в месте нахождения заряда был бы равен . Выразить заряды через потенциалы и .

**Решение**. Воспользуемся теоремой Грина (см. задачу …). В состоянии, когда заряд находится вблизи заземленных проводников ( – потенциал и заряд в точке ):

Когда заряд в точке отсутствует:

Формулы Грина принимают вид:

**\*\*Задача**. Воспользовавшись формулой Грина, найти заряд, индуцированный на заземленной металлической сфере радиуса , если на расстоянии от нее находится точечный заряд .



**Решение**. Ранее мы решали эту задачу методом электростатических изображений и подбирали заряд с тем условием, чтобы поверхность сферы оказалась эквипотенциальной поверхностью для потенциала. Теперь решим задачу иначе. Рассмотрим 2 случая, когда заряд есть и шар заземлен, и когда его нет, и шар не заземлен.

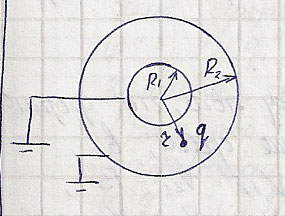
В первом случае (первые значения для сферы, вторые для заряда)

Во втором:

Формулы Грина принимают вид:

Этот результат совпадает с тем, что получен ранее.

**\*\*Задача**. Заряд находится между двумя концентрическими заземленными проводящими сферами с радиусами . Найти индуцированный на них заряд.



**Решение**. Проще всего решать подобные задачи, используя теорему Грина.

Итак, в случае, описанном в условии задачи (индекс 0 соответствует заряду):

Теперь можно рассмотреть по очереди два других случая, когда заряда и заземлена только внешняя сфера . Внутренняя не заземлена.

Составляем равенства по теореме Грина.

Потенциалы нам известны

По закону сохранения заряда:

Тогда

Получим, что

Заряд второй сферы можно найти аналогично, либо воспользовавшись законом сохранения заряда:

**Задача [11]**. Три одинаковых изолированных шара расположены в вершинах равностороннего треугольника. Проволокой, подключенной к удаленному заряженному проводнику, потенциал которого не известен, но поддерживается постоянным, по очереди касаются каждого их шаров. Заряды первых двух шаров оказались после этого равными и . Найти заряд на третьем шаре.

**Решение**. Заряды проводников и их потенциалы линейно выражаются друг через друга:

В нашем случае это

Каждое из этих равенств напишем для очередного касания. После первого касания . Второй и третий шар изолированы, поэтому их заряд не изменится: . Поэтому первое равенство примет вид:

После второго касания: , . Так что второе равенство запишется в виде:

Потенциал первого шара, конечно, изменился, но это уже не важно. После третьего касания:

Потенциальные коэффициенты зависят от расстояния между проводниками, их размеров и среды. Эти параметры неизменны. Кроме того, в условии задачи полная симметрия. Поэтому

Уравнения принимают вид:

Отсюда

и

**Задача [11]**. Решить предыдущую задачу для случая, когда заряды располагаются в вершинах правильного тетраэдра. После поочередного касания известны заряды и . Найти и .

**Решение**. Рассуждаем аналогично. Замечаем, что и здесь полная симметрия. После каждого касания уравнения принимают вид:

Из первых трех уравнений получаем:

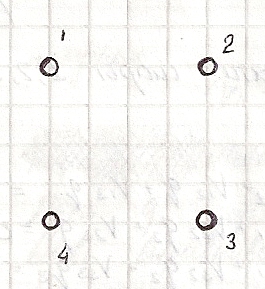
Из первых двух:

Подставив это значение в последние два уравнения системы, получим

Отсюда следует, что и

**Задача[6]**. Четыре одинаковые проводящие сферы расположены по углам квадрата. Сфера 1 несет заряд . Затем она соединяется тонкой проволочкой поочередно на время, достаточное для равновесия со сферами 2,3,4 (нумерация циклическая). Найти распределение заряда между проводниками по окончании всех операций. Потенциальные коэффициенты заданы.

**Решение**. Ввиду симметрии в системе, сразу можем заметить, что



Соединим 1-шар со 2-ым. Предположим, что потенциал шаров стал равным . После касания можем написать:

Поскольку:

Можем переписать

С учетом симметрии и равенства коэффициентов

Соединим 1-шар со 3-им. Предположим, что потенциал шаров стал равным ’’. После касания запишем

Соединим 1-шар со 4-им. Предположим, что потенциал шаров стал равным ’’’. После касания запишем

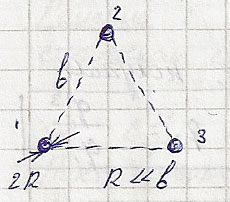
С учетом симметрии коэффициентов, пишем

Получаем, что

Итак, заряды шаров после всех операций (1,2,3,4 соответственно):

**Задача[6№185]**. Три одинаковые проводящие сферы с радиусами находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной . Вначале все сферы имели одинаковые заряды . Затем они по очереди заземлялись на время, достаточное для установления равновесия. Какой заряд остается на каждой сфере по окончании всех операций?

**Решение**. Напишем систему так, чтобы каждое уравнение описывало сферу после ее заземления. Ввиду симметрии системы можем заметить сразу, что



После заземления 1-й сферы (заряды остальных шаров не изменились и равны ):

После заземления 2-й сферы:

После заземления 3-й сферы:

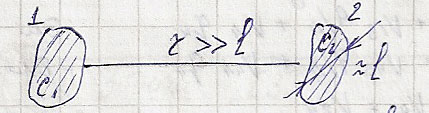
С учетом симметрии коэффициентов, система запишется в виде:

Из первого уравнения получается, что . Заметим, что после заземления 1-й сферы потенциал на ее поверхности

Откуда и тогда

Три уравнения и три неизвестных. Элементарно получаем

**Задача[6]**. Два проводника с емкостями и помещены на расстояние друг от друга, которое больше по сравнению с их собственными размерами. Определить коэффициенты .



**Решение**. Под и подразумеваются обычные «собственные» емкости, которые определяются по правилу:

Ввиду большого расстояния между проводниками, пренебрегаем их поляризацией. Это позволяет также считать потенциал одного проводника в месте нахождения другого как потенциал точечного заряда .

Предположим, проводник 1 заряжен, а проводник 2 – нет. Тогда

Откуда

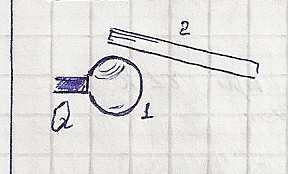
Теперь считаем, что проводник 2 заряжен, а проводник 1 – нет.

Откуда

Емкостные коэффициенты это обратная матрица:

Она легко находится. Ее коэффициенты равны:

**Задача[6**]. Проводник заряжается путем последовательных подсоединений к разрядному шарику электрофора. Шарик электрофора после каждого под соединения вновь заряжается, приобретая при этом заряд . При первом подсоединении на проводник с шарика переходит заряд . Какой заряд получит проводник после очень большого числа подсоединений?



**Решение**. Прикоснемся проводником к шарику электрофора. В этом случае проводник получит заряд , а электрофор потеряет такой же заряд. Теперь его заряд станет равным .

Разложение для их потенциалов будет выглядеть так:

Поскольку

уравнения запишутся в виде

Пусть заряд проводника после k-го прикосновения. После прикосновения потенциалы выравниваются до значения . Проводник получил заряд , а электрофор потерял такой же заряд. Теперь заряд электрофора . Записываем уравнения для этого случая:

Отсюда:

Сравнивая с найденным ранее соотношением, получим

Или

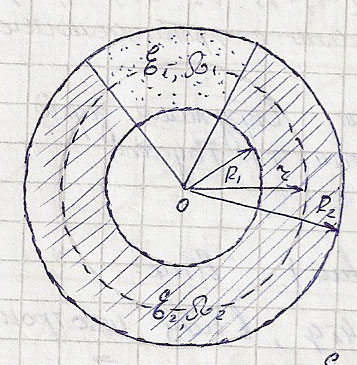
Мы получили рекуррентное соотношение. Оно дает такую последовательность:

Продолжая, получим

Поскольку , это убывающая геометрическая прогрессия. Ее сумма:

**Задача**. Пространство между обкладками сферического конденсатора частично заполнено диэлектриком, расположенным внутри телесных углов и с диэлектрическими проницаемостями и . Радиусы обкладок и . Найти поле внутри конденсатора и его емкость.

**Решение**. Воспользуемся теоремой Гаусса. Выделим сферическую поверхность радиуса .



*–* свободный заряд (в данном случае это сфера ). Диэлектрик однородный, поэтому . Интеграл принимает вид:

Или

Выразим поверхности через телесный угол. Заметим пропорцию:

Тогда

Потенциал:

Емкость конденсатора, по определению:

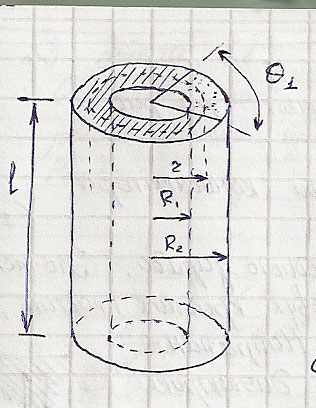
Окончательно получим:

Следствие 1. Если конденсатор заполнен диэлектриком наполовину, а вторая половина не заполнена, получим

Следствие 2. Если конденсатор заполнен диэлектриком в угле , а вторая половина не заполнена, получим

**Задача**. Решить предыдущую задачу для цилиндрического конденсатора (рис).

**Решение**. Повторяем рассуждения. Получим аналогичную формулу



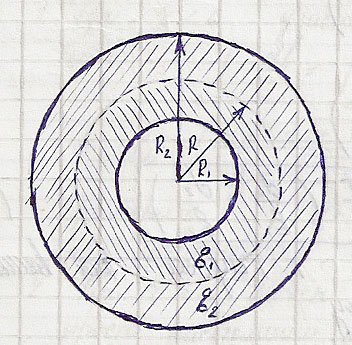
Пусть – линейная плотность заряда (заряд на ед. длины). Тогда .

На всю поверхность приходится угол , а на поверхность угол . Из пропорции

находим, что . Тогда

**Задача**. Внутри сферического конденсатора с радиусами обкладок и диэлектрическая проницаемость меняется по закону:

Найти емкость конденсатора, распределение связанных зарядов и полный связный заряд в диэлектрике.



**Решение**. В нашем диэлектрике . Индукция:

Следовательно,

Потенциалы находятся из соотношения

На границе раздела диэлектриков

Из первого соотношения следует, что

Емкость конденсатора:

Найдем плотность поляризационных зарядов.

Отсюда получим

Для :

Для

Для :

Проверка: